1. FIZIČKA MERENJA I OBRADA EKSPERIMENTALNIH REZULTATA

1.1. FIZIČKE VELIČINE

Fizika je osnovna prirodna nauka koja izučava prirodne pojave putem eksperimentalnih opažanja i kvantitativnih merenja, i stvaranja fizičkih teorija. Teorijsko i eksperimentalno izučavanje pojava se neprekidno prepliću tako što novi eksperimentalni rezultati utiču na razvoj teorije a svaka nova teorija zahteva eksperimentalnu proveru.

Zakonitosti teorije i rezultati eksperimenata izražavaju se matematičkim relacijama. Takvu formu zapisa, kojima se opisuju fizičke pojave, fizičari izražavaju preko skupa fizičkih veličina.

Fizičke veličine odražavaju osnovna svojstva objekata, njihovog okruženja i pojava. Određena vrednost neke fizičke veličine izražava se kao proizvod njene brojne vrednosti i njene merne jedinice. Na pr. za fizičku veličinu, A, relacija koja njenu apstraktnu vrednost povezuje sa konkretnom vrednošću je jednačina:

$$A = \{A\}[A]. \tag{1.1}$$

U relaciji (1.1) $\{A\}$ označava brojnu vrednost, a $[A]$ mernu jedinicu fizičke veličine A.

Ako je, na primer, masa nekog tela $m = 25$ kg, u ovom zapisu je brojna vrednost $\{m\} = 25$, a jedinica $[m] = kg$.

Za određenu naučnu oblast ili za sve oblasti nauke može se izabrati sistem veličina za reprezentovanje njenih relacija i zakonitosti. U okviru takvog sistema veličina mogu se izdvojiti osnovne veličine i izvedene veličine koje se mogu izraziti preko osnovnih.

U Tabeli 1.1. je dat skup od sedam osnovnih fizičkih veličina u Međunarodnom sistemu jedinica (SI), njihove oznake i oznake dimenzija.

Tabela 1.1. *Osnovne fizičke veličine i njihove oznake.*

Veličina	Oznaka veličine	Oznaka dimenzije
Dužina	l	L
Masa	m	M
Vreme	t	T

Termodinamička temperatura	T	θ
Jačina električne struje	I	
Jačina svetlosti	J	J
Količina supstance	n	

Jedna od primena oznaka dimenzije je dimenziona analiza koja se sprovodi kada treba proveriti neku formulu. Na pr. želimo da proverimo formulu za pređeni put tela koje se kreće sa konstantnim ubrzanjem, a:

$$s=\frac{1}{2}a t^2 . \tag{1.2}$$

Odgovarajuća dimenziona jednačina je oblika:

$$\mathrm{L}=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}\mathrm{T}^2=\mathrm{L} . \tag{1.3}$$

Češće nego sa oznakama dimenzija, dimenziona analiza se vrši sa samim jedinicama za fizičke veličine, što bi kod prethodnog primera izgledalo ovako:

$$\mathrm{m}=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\mathrm{s}^2=\mathrm{m} . \tag{1.4}$$

1.2. MEĐUNARODNI SISTEM JEDINICA (SI)

Međunarodni sistem jedinica (*franc. Systeme International*) je koherentni sistem mernih jedinica zasnovan na sledećim osnovnim jedinicama:

Tabela 1.2. *Međunarodni sistem jedinica.*

Veličina	**Jedinica**	**Oznaka jedinice**
Dužina	metar	m
Masa	kilogram	kg
Vreme	sekund	s
Termodinamička temperatura	kelvin	K
Jačina električne struje	amper	A
Jačina svetlosti	kandela	cd
Količina supstance	mol	mol

Koriste se i dve dopunske, odnosno izvedene bezdimenzione jedinice Međunarodnog sistema jedinica za:

Ugao u ravni	radijan	rad
Prostorni ugao	steradijan	sr

Definicije osnovnih mernih jedinica su:

Za dužinu:

Metar je dužina putanje koju u vakuumu pređe svetlost za vreme od $1/299\,792\,458$ sekundi.

Za masu:

Kilogram je masa međunarodnog etalona kilograma koji se čuva u Međunarodnom birou za tegove i mere u Sevru, kraj Pariza.

Za vreme:

Sekunda je trajanje od $9\,192\,631\,770$ perioda zračenja koje odgovara prelasku između dva hiperfina nivoa osnovnog stanja atoma cezijuma 133.

Za jačinu električne struje:

Amper je jačina stalne električne struje koja, kad se održava u dva prava paralelna provodnika neograničene dužine i zanemarljivo malog kružnog poprečnog preseka koji se nalaze u vakuumu na međusobnom rastojanju od jednog metra, prouzrokuje među tim provodnicima silu koja je jednaka $2 \cdot 10^{-7}$ njutna po metru dužine.

Za termodinamičku temperaturu:

Kelvin je termodinamička temperatura koja je jednaka $1/273{,}16$ termodinamičke temperature trojne tačke vode.

Za jačinu svetlosti:

Kandela je jačina svetlosti (u određenom pravcu) izvora koji emituje monohromatsko zračenje frekvencije $540 \cdot 10^{12}$ herca i čija je jačina zračenja u tom pravcu 1/683 vata po steradijanu.

Za količinu supstance:

Mol je količina supstance sistema koji sadrži toliko elementarnih jedinki koliko ima atoma u 0,012 kilograma ugljenika 12.

Za ugao u ravni:

Radijan je ugao u ravni između dva poluprečnika kruga koji na njegovom obimu isecaju luk dužine jednake poluprečniku.

Za prostorni ugao:

Steradijan je prostorni ugao sa temenom u središtu lopte, koji na površini lopte zahvata površinu jednaku površini kvadrata određenog poluprečnikom lopte.

Pored osnovnih jedinica koriste se i izvedene jedinice SI. Sledi nekoliko primera izvedenih jedinica fizičkih veličina i njihov izraz preko osnovnih jedinica SI.

Jedinica za zapreminu je kubni metar:

$$[V]=[l^3]=\mathrm{m}^3. \tag{1.5}$$

Jedinica za silu je njutn:

$$[F]=[m][a]=\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}=\mathrm{N}. \tag{1.6}$$

Jedinica za pritisak je paskal:

$$[p]=\frac{[F]}{[S]}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\left(=\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2}\right)=\mathrm{Pa} \tag{1.7}$$

Jedinica za koeficijent viskoznosti (dinamičku viskoznost) je paskal sekund:

$$[\eta]=[F]\frac{[L]}{[S][v]}=\mathrm{N}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}^2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\left(=\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}}\right)=\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s} \tag{1.8}$$

Da bi se pojednostavilo izražavanje vrlo malih i vrlo velikih veličina uz jedinice SI koriste se prefiksi. Jedinica izvedena njihovom upotrebom, u odnosu na jedinicu fizičke veličine, umnožena je odgovarajućim eksponentom broja deset. U sledećoj tabeli navedeni su prefiksi, odgovarajuće oznake koje se stavljaju ispred oznaka jedinica i vrednosti multiplikativnih faktora.

Tabela 1.3. *Prefiksi za manje i veće jedinice.*

Naziv	Brojna vrednost	Oznaka	Naziv	Brojna vrednost	Oznaka
jokto	10^{-24}	y	deka	10^1	da
zepto	10^{-21}	z	hekto	10^2	h
ato	10^{-18}	a	kilo	10^3	k

femto	10^{-15}	f	mega	10^{6}	M
piko	10^{-12}	p	giga	10^{9}	G
nano	10^{-9}	n	tera	10^{12}	T
mikro	10^{-6}	μ	peta	10^{15}	P
mili	10^{-3}	m	eksa	10^{18}	E
centi	10^{-2}	c	zeta	10^{21}	Z
deci	10^{-1}	d	jota	10^{24}	Y

1.3.MERENJE I OSNOVNE OSOBINE MERNIH INSTRUMENATA

Merenje je skup eksperimentalnih postupaka čiji je cilj određivanje brojne vrednosti neke veličine.

Merenje se u principu vrši upoređivanjem dvaju veličina iste vrste od kojih je jedna standardna. To upoređivanje se sprovodi neposredno ili posredno (direktno odnosno indirektno).

Merenje je direktno ako na instrumentu, bez obzira na složenost njegove konstrukcije i principa na kome radi, očitavamo vrednost merene veličine. Primeri neposrednog poređenja su merenje dužine lenjirom, merenje mase vagom sa tegovima ili merenje jačine struje ampermetrom.

U fizičkim eksperimentima je međutim čest slučaj da instrument za direktno merenje određene veličine ne postoji. Tada se eksperimentalni rezultat dobija u dve faze. Sprovede se više merenja, pa se zatim numeričkim, grafičkim ili nekim drugim putem, dobija tražena veličina. Za ovakav postupak se koristi termin indirektno ili posredno merenje. Određivanje otpora Vitstonovim (Wheatston) mostom je primer ovakvog merenja. Nepoznati otpor se poveže u odgovarajuće strujno kolo, izmere vrednosti dužina žice, očita poznati otpor i na osnovu tih podataka izračuna otpor koji se traži.

Rezultat merenja je, uz retke izuzetke, vrednost koja se pripisuje merenoj veličini. Merenjem se ne može dobiti prava vrednost i zbog toga je bitno da se proceni kolike su greške merenja - one su merilo kvaliteta dobijenog rezultata.

Metod merenja je način upoređivanja, odnosno logičan redosled postupaka, primenjen u toku merenja. Kao primere mernog metoda pomenućemo: *kontaktni metod* (merenje dužine lenjirom), *beskontaktni metod* (merenje dužine mikroskopom), *metod supstitucije* (Bordin metod merenja mase).

Merni instrumenti (merila) su uređaji pomoću kojih se vrši merenje. Na osnovu načina pokazivanja rezultata, merni instrumenti se dele na analogne i digitalne.

Analogni merni instrument je merilo kod koga je pokazivanje ili izlazni signal neprekidna funkcija merene fizičke veličine ili ulaznog signala. Ovi instrumenti obično imaju skalu sa podeocima.

Digitalni merni instrument daje izlazni signal ili pokazivanje u obliku brojeva.

Definisaćemo neke važnije karakteristike mernih instrumenata. Neka se instrumentom očitava fizička veličina A.

1. *Merni opseg mernog instrumenta*, I_A, je interval vrednosti merene veličine unutar koga se merenja vrše sa zadovoljavajućom tačnošću. Ako merni opseg nije naznačen na instrumentu, određuje se na osnovu maksimalne vrednosti naznačene na skali. Navešćemo nekoliko primera mernih opsega različitih instrumenata.

2. *Konstanta mernog instrumenta*, C_A, je koeficijent kojim se množi direktno pokazivanje instrumenta da bi se dobila vrednost merene veličine.

Najjednostavniji slučaj je kada je instrument konstruisan tako da mu skala (displej) direktno pokazuje vrednost fizičke veličine. Tada je $C_A = 1$. Ako je skala označena samo brojevima, tada konstanta instrumenta ima dimenziju odgovarajuće veličine. Na pr. većina lenjira ima konstantu $C_A = 1\,\mathrm{mm}$. Ako instrument ima jednu skalu a više opsega, tada svakom opsegu odgovara druga konstanta i o tome se mora voditi računa pri očitavanju. (Ovo je čest slučaj kod ampermetara i voltmetara.)

Tabela 1.4. *Merni opseg nekih instrumenata.*

Instrument	**Opseg, I_A**
merilo dužine sa mikrometarskim zavrtnjem	(0,00 – 25,00) mm
pomično merilo dužine sa nonijusom	(0,0 – 150,0) mm
tehnička (centigram) vaga	(0,00 – 500,00) g
analitička vaga	(0,0000 – 100,0000) g
laboratorijski termometar sa živom	(–30,0 – 100,0) °C
hronometar	(0,0 – 3600,0) s
standardni miliampermetar	(0 – 100) mA

3. *Tačnost mernog instrumenta* je sposobnost da daje vrednosti bliske pravoj vrednosti dok je *greška* (*granica greške*) mernog instrumenata razlika pokazivanja mernog instrumenta i "prave" vrednosti merene veličine. *Klasa tačnosti* je broj čija vrednost govori u kojoj meri instrument zadovoljava

određene metrološke zahteve. Na primer, ako je klasa tačnosti nekog instrumenta 0,2 a najveća vrednost koju može da izmeri 150 nekih jedinica, sve vrednosti izmerene tim instrumentom imaće grešku koja nije veća od 0,2% od 150.

Za električne merne instrumente klasu tačnosti, k_A, deklariše proizvođač. Za najkvalitetnije, *etalonske* instrumente klasa je 0,1, kod *preciznih* je od 0,2 do 0,5, kod *laboratorijskih* između 1 i 1,5, a kod *pogonskih* od 2,5 do 5.

Greška koju naznačava proizvođač (ili konstruktor) naziva se *nominalna*. Nominalne greške nekih instrumenata su date u Tabeli 1.5.

4. *Osetljivost mernog instrumenta*, β_A, definiše se kao apsolutna vrednost količnika promene njegovog pokazivanja i promene merene veličine. Promena pokazivanja se najčešće izražava kao ugao otklona kazaljke, ili kao interval na skali ili displeju. Na primer, za termometar, osetljivost se izražava kao količnik promene pokazivanja na skali termometra i odgovarajuće promene temperature.

Tabela 1.5. *Nominalna greška nekih instrumenata.*

Instrument	Greška
metalni metar	1mm
pomično merilo dužine sa nonijusom	(0,02 – 0,1) mm
merilo dužine sa mikrometarskim zavrtnjem	(4 – 10)μm
hronometar	0,2s
analitička vaga	0,0002g
termometri sa živom	(0,1 – 1)°C

5. *Ponovljivost* (preciznost) je mera reproducibilnosti rezultata. To je sposobnost mernog instrumenta da se pri ponovljenim merenjima iste veličine, koja se tokom dužeg vremena ne menja, uvek dobijaju rezultati koji se međusobno razlikuju za vrednosti manje od određene.

1.4. GREŠKE MERENJA

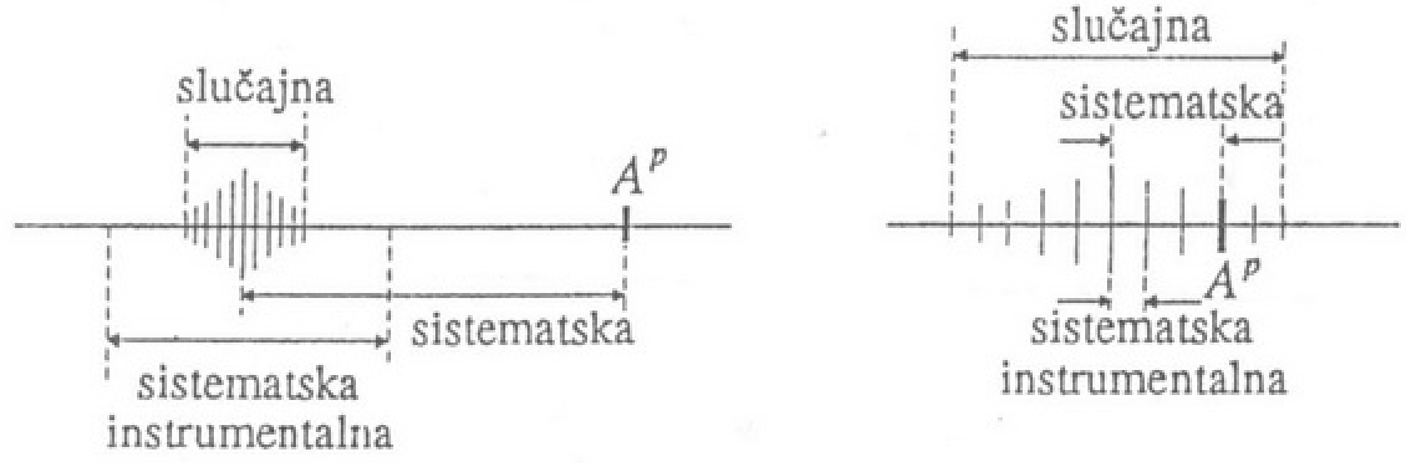
1.4.1. Vrste grešaka merenja

Ako se merenje neke fizičke veličine ponovi nekoliko puta, neće se uvek dobijati isti rezultat, nego niz brojnih vrednosti, koje se, mada su međusobno približne, ipak razlikuju. Drugim rečima izmerene vrednosti fizičke veličine odstupaju od "prave vrednosti". Stoga je osnovni cilj obrade rezultata merenja izračunavanje najverovatnije vrednosti fizičke veličine i procena njene tačnosti. Najverovatnija vrednost se ne mora poklapati sa "pravom vrednošću". Pojam "prava vrednost", osim za merenja koja se svode na prebrojavanje, ima samo teorijsko značenje.

Uzroke nemogućnosti dobijanja "pravih vrednosti" ne treba tražiti samo u nesavršenosti instrumenata, metoda merenja i čula eksperimentatora. Uzroci mogu biti znatno dublji i leže u samoj prirodi. Recimo, u fizici elementarnih čestica postoje parovi fizičkih veličina koje se ne mogu istovremeno izmeriti sa proizvoljnom tačnošću o čemu govore Hajzenbergove (W. Heisenberg) relacije neodređenosti. Takav par čine, na primer, impuls i koordinata čestice.

Pošto postoji dosta uzroka zbog kojih dolazi do odstupanja, odnosno grešaka merenja, važno je da se prepozna vrsta tog odstupanja i zatim se proceni greška, odnosno zaključi u kom intervalu oko izmerene vredosti se nalazi "prava vrednost".

Odstupanja, odnosno greške, mogu biti: *sistematske* i *slučajne*. Na sl. 1.1. prikazana su dva tipa raspodele rezultata merenja fizičke veličine A oko prave vrednosti te veličine A^p, nastala pod različitim uticajem grešaka.



a b

Sl. 1.1. *Uticaj grešaka na rezultate merenja: a.) sistematska>>slučajna; b.) slučajna >>sistematska.*

Sistematske greške mogu biti:

1- *Teorijske:* tj. greške metoda: One nastaju perturbacijom sistema merenjem, i radom i računom po teoriji koja ne važi ili važi samo približno.

2- *Instrumentalne* greške: Ove greške su uglavnom posledica konačne tačnosti kalibracije instrumenta i određene su klasom tačnosti. Sistematska instrumentalna greška jednaka je greški instrumenta i naznačena je na slici 1.1. kao simetričan interval unutar koga se nalazi pokazana vrednost merene veličine.

3- *Brojne*: One su posledica loših vrednosti konstanti, parametara koji karakterišu sredine itd.

4- *Lične*: One proističu iz subjektivne procene rezultata merenja samog eksperimentatora.

Kod teorijskih sistematskih grešaka rezultati su grupisani, ali ne oko "prave vrednosti", kao na sl. 1.1a. Učinak teorijskog sistematskog odstupanja mora da se otkloni tj. obavezno treba izvršiti korekciju rezultata merenja.

Pojava slučajnih grešaka je očekivan i korektan ishod eksperimenta. Rezultati su grupisani, i to oko "prave vrednosti", što je prikazano na sl. 1.1b. Ta odstupanja nastaju zbog više uzroka i na nepredvidiv način. Da bi se slučajna greška mogla zapaziti neophodno je da je ona veća od sistematske instrumentalne greške.

Kada se na vežbama izvodi serija merenja neke fizičke veličine očekuju se slučajne greške. Slučajnim greškama ćemo posvetiti više pažnje kasnije kada budemo govorili o statističkoj raspodeli rezultata merenja.

1.4.2. Apsolutna vednost greške merenja

Ako se sa A obeleži izmerena vrednost veličine, a sa A^p prava vrednost, onda će vrednost greške merenja, biti definisana kao razlika između izmerene i prave vrednosti:

$$A - A^p. \tag{1.9}$$

Apsolutna vrednost greške merenja, $\varepsilon_A{}^p$, je vrednost greške merenja bez obzira na znak:

$$\varepsilon_A{}^p = \left|A - A^p\right|. \tag{1.10}$$

Apsolutna vrednost greške merenja često se skraćeno zove apsolutna greška merenja.

Kao što je "prava vrednost" merenja idealizacija, tako je i ova definicija greške idealizacija, tj. njenu vrednost ne možemo saznati. Ono što je dostupno je procenjena vrednost odstupanja u *slučaju jednog merenja*.

Apsolutna vrednost greške merenja definiše se kao procenjena apsolutna vrednost odstupanja i obeležićemo je sa ε_A.

Rezultat merenja zapisuje se zajedno sa svojom apsolutnom greškom najčešće u obliku:

$$A \pm \varepsilon_A \quad , \tag{1.11}$$

a koristi se i oblik intervala:

$$\left[A - \varepsilon_A, A + \varepsilon_A\right]. \tag{1.12}$$

Apsolutna greška se procenjuje tako da prava vrednost sa velikom verovatnoćom, bude u intervalu, definisanom relacijom (1.12).

Kada kažemo da se apsolutna greška "procenjuje", to znači da prilikom pridruživanja greške rezultatu koji je dobijen jednim merenjem određenim instrumentom i određenim metodom, postoji doza subjektivnosti.

Navešćemo pravila koja se koriste pri proceni:

A) Apsolutna greška, ε_A, je za instrumente sa proporcionalnom skalom (pravolinijskom ili kružnom) jednaka vrednosti podeoka instrumenta.

U slučaju kada su podeoci krupni možemo je proceniti i na polovinu vrednosti podeoka. Na pr. kod očitavanja zapremine izdvojenog gasa pri elektrolizi vode vrednost podeoka zapremine je $1\mathrm{cm}^3$, a za apsolutnu vrednost greške merenja se uzima $\varepsilon_V = 0{,}5\mathrm{cm}^3$.

Za digitalne instrumente apsolutna greška merenja se procenjuje kao polovina zadnjeg cifarskog mesta koju instrument pokazuje.

B) Za *električne merne instrumente*, apsolutna greška se izražava preko klase tačnosti instrumenta, k_A, i mernog opsega I_A (Odeljak 1.3.):

$$\varepsilon_A = \frac{k_A I_A}{100}. \tag{1.13}$$

Na primer za voltmetar klase tačnosti $k_U = 1{,}5$ i opsega $I_U = 20\,\mathrm{V}$ greška merenja napona je:

$$\varepsilon_U = \frac{k_U I_U}{\cdot 100} = \frac{1{,}5 \cdot 20\mathrm{V}}{100} = 0{,}3\mathrm{V}. \tag{1.14}$$

1.4.3. Relativna greška merenja

Apsolutna greška merenja nije dovoljno dobra informacija o kvalitetu merenja. Na pr. izmerena je prvo dužina krede lenjirom i dobijena vrednost $l_k = 4{,}3\mathrm{cm}$ i zatim dužina sobe lenjir-trakom sa milimetarskom podelom sa rezultatom $l_s = 540{,}0\mathrm{cm}$. Iako su u oba slučaja apsolutne greške merenja iste ($1\mathrm{mm}$), ipak smatramo da je merenje sobe "tačnije". U ovom slučaju ocenu tačnosti daje *relativna greška*. Relativna greška se definiše kao količnik apsolutne greške ε_A i izmerene veličine A:

$$\delta_A = \frac{\varepsilon_A}{A}. \tag{1.15}$$

Ako je veličina A negativna uzima se njena apsolutna vrednost.

Relativna greška je neimenovan broj i što je manja utoliko je merenje kvalitetnije. Ona se izražava i kao procentna relativna greška.

Relativna greška merenja je merilo broja sigurnih cifara u rezultatu.

U prethodnom primeru relativna greška merenja krede je 2,3 %, a za merenje sobe 0,018 %.

1.4.4. Greške kod serije merenja iste veličine

Na sl.1.1b. ključnoj za razumevanje ishoda korektno postavljenog eksperimenta, prikazano je rasturanje eksperimentalnih rezultata, pri ponavljanju merenja, usled slučajnih grešaka. Ono se uglavnom dešava pod uticajem činilaca koji su van kontrole eksperimentatora.

Dakle, kada želimo da merenjem nađemo vrednost neke veličine A u eksperimentu koga karakterišu stabilni uslovi, merenje ćemo ponavljati više puta. Kao rezultat n merenja uzima se aritmetička sredina pojedinačnih rezultata $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i . \tag{1.16}$$

Ovako dobijen rezultat se retko prikazuje sa greškom koja nije statističke prirode, na pr. sa najvećom od grešaka pojedinih merenja $A = \langle A \rangle \pm \varepsilon_A^{max}$. (Ovo se obično radi kada je broj ponavljanja mali.) Češće se primenjuje statističko vrednovanje rezultata.

Osnovna karakteristika rasturanja merenih vrednosti u ovom slučaju je standardna devijacija koja se definiše izrazom:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(A_i - \langle A \rangle\right)^2}{n-1}} . \tag{1.17}$$

Može se reći da se u okviru intervala $\langle A \rangle \pm \sigma_A$ nalazi 68,3% rezultata merenja, u okviru $\langle A \rangle \pm 2\sigma_A$ je 95,4% rezultata merenja, a u rasponu $\langle A \rangle \pm 3\sigma_A$ leži 99,73% rezultata merenja, tj. skoro sve merene vrednosti.

Mera valjanosti srednje vrednosti merenja je statistička greška, S_A, koja je povezana sa standardnom devijacijom i brojem merenja n relacijom:

$$S_A = \frac{\sigma_A}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(A_i - \langle A \rangle\right)^2}{n(n-1)}}\,. \tag{1.18}$$

Rezultat ponovljenih merenja tada se prikazuje u obliku:

$$\langle A \rangle \pm k\, S_A\,. \tag{1.19}$$

Proizvod $k\,S_A$ se u literaturi takođe naziva statistička greška, pri čemu je k njen stepen pouzdanosti. Izborom vrednosti za faktor k, definiše se nivo pouzdanosti statističke greške S_A, tj. verovatnoća W da će se stvarna vrednost fizičke veličine naći u okviru intervala određenog relacijom (1.19).

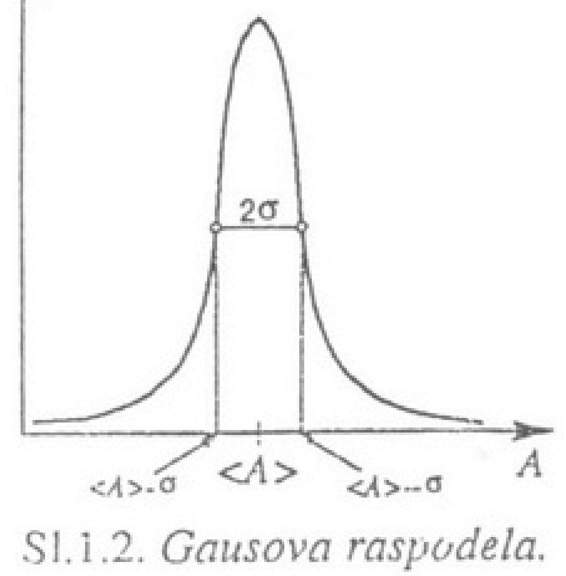
U Tabeli 1.6. prikazana je verovatnoća, W, u procentima, u zavisnosti od stepena pouzdanosti k. Ako je faktor $k=0{,}68$ statistička greška se naziva verovatna, za $k=1{,}00$ standardna, za $k=1{,}65$ pouzdana, a za $k=3{,}00$ sigurna.

Kada broj ponavljanja merenja raste i rezultati počinju da se ponavljaju i nagomilavaju oko srednje vrednosti. Nastaju grupe jednakih rezultata unutar intervala sistematske instrumentalne greške. Ovo grupisanje rezultata, tj. raspodela oko srednje vrednosti, je statističke prirode.

Tabela 1.6. *Zavisnost verovatnoće od stepena pouzdanosti.*

k	0,00	0,50	0,68	1,00	1,65	2,00	3,00
W,%	0,0	38,3	50,0	68,3	90,0	95,4	99,7

Verovatnoća ili učestanost pojavljivanja određenog rezultata najčešće izgleda kao na sl. 1.2. To je simetrična normalna, tzv. Gausova (K. Gauss), raspodela. Apscisa pokazuje rezultate pojedinačnih merenja a ordinata verovatnoću odnosno učestanost njihovih pojavljivanja, f. Tada srednja vrednost merene veličine odgovara sredini raspodele tj. položaju maksimuma. Sa povećanjem broja merenja, povećava se pouzdanost da će sredina raspodele odgovarati "pravoj" vrednosti.



Sl.1.2. *Gausova raspodela.*

Standardna devijacija je u ovom slučaju mera širine Gausove raspodele. Njena vrednost predstavlja polovinu širine krive na polovini visine maksimuma i odgovara položaju prevojnih tačaka.

Neka su posle izvođenja n merenja rezultati grupisani u k grupa tako da i-tu grupu, ($i = 1, 2 \ldots k$), čine rezultati jednaki A_i. Ako se A_i ponavlja f_i puta, $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$, pa izrazi za srednju vrednost, standardnu devijaciju i statističku grešku (formule 1.16, 1.17 i 1.18) prelaze u:

$$\langle A \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i A_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}, \tag{1.20}$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \left(A_i - \langle A \rangle\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1}}, \tag{1.21}$$

$$S_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \left(A_i - \langle A \rangle\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i \left(\sum_{i=1}^{k} f_i - 1\right)}}. \tag{1.22}$$

Ilustrujmo obradu podataka veće serije merenja primerom: U vežbi "Određivanje energije alfa čestica" izračunava se srednji domet alfa čestica i njegova standardna greška. Neka je na pr. merenjem dobijen skup vrednosti dometa alfa čestica, R_i, i broj pojavljivanja određene vrednosti dometa, f_i. U Tabeli 1.7. su pored tih vrednosti dati i izrazi koji omogućavaju izračunavanje srednje vrednosti i standardne statističke greške.

Tabela 1.7. *Primer statističke obrade podataka.*

i	domet R_i, μm	učestanost f_i	$f_i R_i$ μm	$R_i - \langle R \rangle$ μm	$\left(R_i - \langle R \rangle\right)^2$ μm²	$f_i\left(R_i - \langle R \rangle\right)^2$ μm²
1	2	1	2	-7,06	49,84	49,84
2	3	1	3	-6,06	36,72	36,72
3	4	0	0	-5,06	25,60	0,00
4	5	5	25	-4,06	16,48	82,40
5	6	7	42	-3,06	9,36	65,52
6	7	10	70	-2,06	4,24	42,40

7	8	23	184	-1,06	1,12	25,76
8	9	41	369	-0,06	0,00	0,00
9	10	19	190	0,94	0,88	16,72
10	11	16	176	1,94	3,76	60,16
11	12	9	108	2,94	8,64	77,76
12	13	4	52	3,94	15,52	62,08
13	14	1	14	4,94	24,40	24,40
14	15	1	15	5,94	35,28	35,28
		$\sum_{i=1}^{14} f_i = 138$	$\sum_{i=1}^{14} f_i R_i =$ 1250 μm			$\sum_{i=1}^{14} f_i(R_i - \langle R\rangle)^2 =$ 579,04 μm^2

Odavde je na osnovu relacija (1.20) i (1.22):

$$\langle R\rangle = \frac{\sum_{i=1}^{14} f_i R_i}{\sum_{i=1}^{14} f_i} = 9{,}06\mu\text{m}, \qquad S_R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{14} f_i\left(R_i - \langle R\rangle\right)^2}{\sum_{i=1}^{14} f_i\left(\sum_{i=1}^{14} f_i - 1\right)}} = 0{,}175\,\mu\text{m}.$$

Ovaj rezultat se korektno zapisuje na sledeći način:

$$\langle R\rangle \pm \varepsilon_R = (9{,}06 \pm 0{,}18)\mu\text{m},$$

pri čemu je korišćena konvencija o zadržavanju dve cifre različite od nule u grešci rezultata, o čemu će biti reči kasnije.

(Za ovakvu obradu podataka postoje gotovi programi čak i na mnogim džepnim računarima pa tabela služi samo kao ilustracija postupka.)

Mi ćemo, u principu, kada god budemo vršili seriju merenja iste veličine, koristiti standardnu statističku grešku kao apsolutnu vrednost greške merene veličine.

1.5. ODREĐIVANJE REZULTATA EKSPERIMENTA

1.5.1. Određivanje fizičke veličine kao funkcije rezultata merenja

Ako se rezultati merenja uvrštavaju u jednu ili više funkcija pomoću kojih se dolazi do krajnjeg rezultata, takvu vrstu određivanja fizičke veličine možemo da zovemo numeričkom ili funkcionalnom, ili pošto je to izuzetno čest metod prosto indirektnim određivanjem rezultata eksperimenta.

Najpovoljnija forma funkcije je, kad je veličina koja se određuje, eksplicitno izražena kao funkcija fizičkih veličina koje su dobijene kao rezultati merenja i konstanti. Konstante mogu biti različitog porekla: matematičke, na pr. π; fizičke, kao što je ubrzanje Zemljine teže, g; ili raznovrsne karakteristike eksperimentalnih uređaja.

Opšti oblik takve funkcije je:

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_k\right) \tag{1.23}$$

U jednačini (1.23) sa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obeležen je skup od n fizičkih veličina koje se mere, a sa $c_1, c_2, \ldots, c_k$ skup k konstanti. Na primer u vežbi "Proveravanje Bernulijeve (D. Bernoulli) jednačine za vodu", protok, Q, se izračunava nakon merenja dve veličine: zapremine V, i proteklog vremena t, na osnovu obrasca $Q = V/t$.

1.5.2. Određivanja grešaka ε_y i δ_y preko funkcije rezultata merenja

Polazeći od opšte jednačine (1.23), može se izraziti apsolutna i relativna greška veličine koju određujemo. Za to se koristi totalni diferencijal funkcije više promenljivih $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$:

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i \tag{1.24}$$

Sa $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ su obeleženi parcijalni izvodi po promenljivim, a dx_i su diferencijali promenljivih. Ako se u relaciji (1.24) infinitezimalno male promene promenljivih dx_i zamene apsolutnim vrednostima grešaka i uzimanjem njihove apsolutne vrednosti uključi zahtev da doprinosi koji potiču od pojedinih grešaka ne smeju da se kompenzuju, dobijamo izraz za apsolutnu vrednost greške veličine koju određujemo:

$$\varepsilon_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \varepsilon_{x_i} \tag{1.25}$$

Relativna greška se određuje na standardni način:

$$\delta_y = \frac{\varepsilon_y}{|y|}. \tag{1.26}$$

Treba naglasiti da ovaj način izvođenja grešaka rezultata važi u slučaju kada su sve pojedinačne greške instrumentalne sistematske greške.

Ako su greške korišćenih rezultata, ε_{x_i}, slučajne greške pojedinačnih merenja, ovako se dobija maksimalna moguća greška indirektnog merenja.

Relacija (1.25) se obično primenjuje kada je funkcija f zbir ili razlika direktno merenih veličina što ćemo ilustrovati na obrascu za izračunavanje dužine matematičkog klatna: $l=\dfrac{l_1+l_2}{2}$ (jedn. 5.10.). Za apsolutnu vrednost greške se dobija:

$$\varepsilon_l=\left|\frac{\partial l}{\partial l_1}\right|\varepsilon_{l_1}+\left|\frac{\partial l}{\partial l_2}\right|\varepsilon_{l_2}=\frac{1}{2}\varepsilon_{l_1}+\frac{1}{2}\varepsilon_{l_2}. \qquad (1.27)$$

Relativna greška se zatim lako izračunava iz relacije (1.26.)

Ako je eksperiment takav da konstanta aparature ima grešku koja se ne može zanemariti, tada treba uračunati i njen doprinos u relaciji za apsolutnu vrednost greške (1.25).

U većem broju slučajeva se rezultat dobija kao proizvod ili količnik više veličina sa odgovarajućim eksponentima:

$$A=B^p\,C^k\,D^{-m}. \qquad (1.28)$$

Tada je jednostavnije da se prvo izračuna relativna greška sledećim postupkom: Najpre se logaritmuje ceo izraz:

$$\ln A=\ln(B^p\,C^k\,D^{-m})=p\ln B+k\ln C-m\ln D, \qquad (1.29)$$

a zatim se odredi diferencijal leve i desne strane:

$$\frac{dA}{A}=p\frac{dB}{B}+k\frac{dC}{C}-m\frac{dD}{D}. \qquad (1.30)$$

Prevođenjem diferencijalnih promena u apsolutne vrednosti grešaka i uzimanjem u obzir konvencije o obaveznom sabiranju grešaka dobija se relativna greška veličine A koja se određuje:

$$\frac{\varepsilon_A}{A}=p\frac{\varepsilon_B}{B}+k\frac{\varepsilon_C}{C}+m\frac{\varepsilon_D}{D}; \qquad (1.31)$$

odnosno:

$$\delta_A=p\cdot\delta_B+k\cdot\delta_C+m\cdot\delta_D; \qquad (1.32)$$

a apsolutna greška se dobija jednostavnim množenjem:

$$\varepsilon_A = A \cdot \delta_A \,. \tag{1.33}$$

Za ovakav postupak daćemo kao primer određivanje greške gustine tečnosti u vežbi "Određivanje gustine čvrstih i tečnih tela". Gustina tečnosti je data jednačinom (4.5):

$$\rho = \frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1} \rho_0 \,,$$

gde je ρ_0 gustina destilovane vode, m_1 masa praznog piknometra, m_2 masa piknometra napunjenog destilovanom vodom, a m_3 masa piknometra napunjenog tečnošću nepoznate gustine. Pretpostavimo da je gustina vode poznata sa greškom ε_{ρ_0}, a da su mase merene sa greškom ε_m. Logaritmovanjem prethodne relacije dobija se:

$$\ln \rho = \ln(m_3 - m_1) - \ln(m_2 - m_1) + \ln \rho_0$$

Diferenciranjem relacije sledi:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d(m_3 - m_1)}{m_3 - m_1} - \frac{d(m_2 - m_1)}{m_2 - m_1} + \frac{d\rho_0}{\rho_0} \,.$$

Pošto se diferencijali prevedu u apsolutne vrednosti grešaka, dobija se izraz za relativnu a zatim i za apsolutnu grešku gustine:

$$\delta_\rho = \frac{2\varepsilon_m}{m_3 - m_1} + \frac{2\varepsilon_m}{m_2 - m_1} + \delta_{\rho_0} \,, \qquad \varepsilon_\rho = \rho \cdot \delta_\rho \,.$$

1.6. PRIKAZIVANJE REZULTATA MERENJA

1.6.1. Obrada rezultata merenja

Kada se navodi brojna vrednost neke fizičke veličine, način pisanja, odnosno broj cifarskih mesta upotrebljenih za njen zapis treba da odgovara stepenu tačnosti poznavanja te vrednosti. Ako smo zapisali neki broj, sa na pr. 5 cifarskih mesta, smatra se da su prve četiri cifre *sigurne*, dok je peta *nesigurna*.

Ako nije poznata greška koja bi odredila stepen nesigurnosti, podrazumeva se da je greška onog reda veličine koji odgovara poslednjoj cifri. Na pr. vremenski interval je $13{,}6\ \mathrm{s}$. Ovako zapisan rezultat bez navođenja greške podrazumeva da je greška merenja vremena reda desetih delova sekundi. Naravno, ako je vreme mereno hronometrom čija je apsolutna vrednost greške $\varepsilon_t = 0{,}2\mathrm{s}$, korektno zapisan rezultat je oblika $t \pm \varepsilon_t = (13{,}6 \pm 0{,}2)\,\mathrm{s}$.

Kada se vrednosti koje imaju nesigurne cifre koriste u daljim računima, treba "imati osećaj" sa koliko cifrara ima smisla izražavati dobijeni rezultat. Na pr: telo je prešlo put $l \pm \varepsilon_l = (86{,}00 \pm 0{,}05)\mathrm{m}$ tokom pomenutog vremenskog intervalá i interesuje nas njegova srednja brzina data relacijom $v = l\,/\,t$. Običan kalkulator daje vrednost količnika $l\,/\,t = 6{,}3235294\ \mathrm{m/s}$. Primenjujući pravilo za izračunavanje apsolutne greške brzine dobija se:

$$\varepsilon_v = v\left(\frac{\varepsilon_l}{l} + \frac{\varepsilon_t}{t}\right) = 0{,}0966695 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

I ovde kalkulator daje 8 cifara. Koliko cifara treba zadržati? Na vežbama se koristi sledeća konvencija:

> Apsolutna vrednost *greške* se u principu zaokružuje tako da se zadrži samo jedna cifra različita od nule. (Kada je potrebno izraziti i pouzdanost same greške, greška se zaokružuje na dve cifre različite od nule. Ovo je obično slučaj kod važnih naučnih eksperimenata.)

Da bi bio zadovoljen uslov da vrednost greške treba da obezbedi da prava vrednost sigurno, ili sa velikom verovatnoćom bude u intervalu definisanim relacijom (1.11), greška se ne zaokružuje na uobičajen način, nego sa *uvećavanjem vrednosti*, tj. *majoriranjem*. Pri tome se ne opredeljujemo za najstrožiju konvenciju, nego biramo sledeću kompromisnu varijantu:

> Ako je druga cifra u brojnoj vrednosti za grešku veća od 1, ili jednaka 1, prva cifra se povećava za jedan. Ako je druga cifra u brojnoj vrednosti za grešku 0, prva cifra se ne menja. (Ovo praktično znači sledeće: $125 \approx 200$ ali $0{,}807 \approx 0{,}8$.)

To znači da se u prethodnom primeru apsolutna vrednost greške zapisuje u obliku:

$$\varepsilon_v = 0{,}1\ \mathrm{m/s}.$$

Kada se posle zaokruživanja greške pogleda rezultat za brzinu, vidi se da nema smisla zadržavati sve cifre koje daje kalkulator, već samo jednu nesigurnu cifru koja je na dekadnom mestu greške. Pri zaokruživanju rezultata koristi se sledeća konvencija:

Ako je cifra iza one koju zaokružujemo veća od 5, zaokružuje se povećanjem cifre za 1; ako je sledeća cifra manja od 5 prethodna cifra se ne menja, a ako je sledeća cifra tačno 5, prethodna se zaokružuje na parnu vrednost.

Vrednost brzine, u našem primeru, je prema tome $v=6{,}3$ m/s, pa je korektno zapisan rezultat:

$$v \pm \varepsilon_v = (6{,}3 \pm 0{,}1)\ \mathrm{m/s}.$$

Zbog osećaja za red veličine nekog rezultata, preporučljivo je da se rezultat izražava uz izvlačenje eksponenta broja 10, tj. uz upotrebu eksponencijalne notacije. Sledeći primer ilustruje i ovo pravilo:

U vežbi "Proveravanje Bernulijeve jednačine za vodu", da bi se odredio protok Q kroz Venturijevu cev, menzurom čija je greška $\varepsilon_V=2\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3$, meri zapremina tečnosti, V, koja istekne za vreme t. Vreme se meri hronometrom ($\varepsilon_t=0{,}2$s). Neka je izmereno da je za $t=93{,}2$s istekla zapremina vode $V=1{,}7\ \mathrm{dm}^3$. Korektno zapisani podaci vremena i zapremine su:

$$t \pm \varepsilon_t = (93{,}2 \pm 0{,}2)\ \mathrm{s}\ ; \quad V \pm \varepsilon_V = (1{,}70 \pm 0{,}02)\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3.$$

Na osnovu veze $Q=V/t$ i relacije (1.32) dobija se:

$$Q=\frac{V}{t}=1{,}824034335\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}\ ;$$

$$\delta_Q=\frac{\varepsilon_V}{V}+\frac{\varepsilon_t}{t}=0{,}0139106286=1{,}39106286\%.$$

$$\varepsilon_Q=Q\cdot\delta_Q=0{,}0253734\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

Koristeći usvojena pravila o zaokruživanju, rezultati se prikazuju na sledeći način:

$$\delta_Q=1{,}4\% \qquad Q\pm\varepsilon_Q=(1{,}82\pm 0{,}03)\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}.$$

1.6.2. Tabelarno i grafičko prikazivanje rezultata eksperimenta

Kod merenja fizičkih veličina koje su međusobno povezane preko neke funkcije pregledno je te veličine prikazati tabelarno. Na primer, pošto su pritisak p, i temperatura θ, idealnog gasa, za konstantnu zapreminu i konstantnu količinu gasa, povezani Šarlovim (J.Charles) zakonom:

$$p=p_0(1+\alpha\theta),$$

gde je p_0 pritisak na nula stepeni Celzijusove skale (A. Celsius), a α termički koeficijent promene pritiska, u vežbi "Proveravanje Šarlovog zakona za vazduh" mere se temperature idealnog gasa i odgovarajući pritisci. Za merenje temperature koristi se termometar čija je greška $\varepsilon_\theta=0{,}2\,^\circ\mathrm{C}$. Pritisak se određuje nakon merenja spoljašnjeg pritiska p_a, koji iznosi na primer p_a=98000 Pa, i razlike nivoa žive h, u otvorenom manometru sa živom na osnovu formule $p=p_a+\rho gh$, gde je ρ gustina žive a g ubrzanje Zemljine teže. Greška manometra kojim se meri spoljašnji pritisak je $\varepsilon_{p_a}=100$ Pa, a greška lenjira kojim se meri razlika nivoa žive je $\varepsilon_h=1$ mm. Apsolutna vrednost greške pritiska izračunava se na osnovu izraza za pritisak i formule (1.25), i iznosi $\varepsilon_p=\varepsilon_{p_a}+\rho g\varepsilon_h$, uz pretpostavku da su gustina žive i ubrzanje Zemljine teže poznate konstante. Dobijeni rezultati su prikazani u Tabeli 1.8. U poslednjoj koloni su prikazani pritisci i odgovarajuće greške nakon zaokruživanja.

Tabela 1.8. *Pritisci gasa na odgovarajućim temperaturama.*

θ, °C	h, m . 10^{-3}	p, Pa	$p\pm\varepsilon_p$, kPa
21,2	17	100268	100,3 ± 0,3
27,0	33	102399	102,4 ± 0,3
36,4	54	105199	105,2 ± 0,3
42,2	69	107199	107,2 ± 0,3
56,0	91	110132	110,1 ± 0,3
59,6	107	112265	112,3 ± 0,3
69,0	126	114798	114,8 ± 0,3

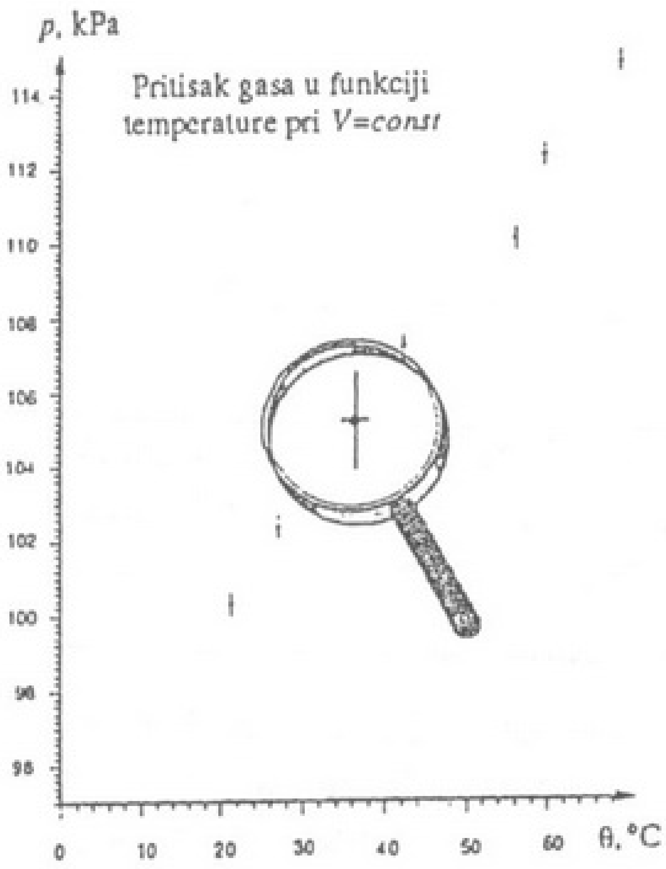
Ovi rezultati se mogu očiglednije prikazati grafički. Na apcisu se nanose vrednosti nezavisno promenljive, u našem primeru temperature θ, a na ordinatu vrednosti funkcije, tj. pritiska p (sl. 1.3.). Kada se pogledaju eksperimentalne tačke, vidi se da tačka za temperaturu $\theta=56{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ "štrči". Na osnovu toga može se zaključiti da je pri merenju kod ove tačke napravljena gruba greška i merenje se ponavlja ili se taj podatak izbacuje iz dalje analize.

Na vežbama se za crtanje koristi milimetarski papir formata A4. Ako jedna od ispitivanih veličina u eksperimentu menja svoju vrednost za nekoliko redova veličina, za njeno prikazivanje se koristi papir sa logaritamskom podelom na odgovarajućoj osi.

Pri grafičkom prikazivanju rezultata treba se pridržavati uobičajenih pravila koja ćemo sada navesti, a koja su korišćena na primeru na sl. 1.3.

PRAVILA ZA GRAFIČKI PRIKAZ REZULTATA MERENJA

1. Grafik treba da ima naslov koji koncizno saopštava sve bitne podatke o njemu.
2. Koordinantne ose treba povući duž ivice milimetarske podele.



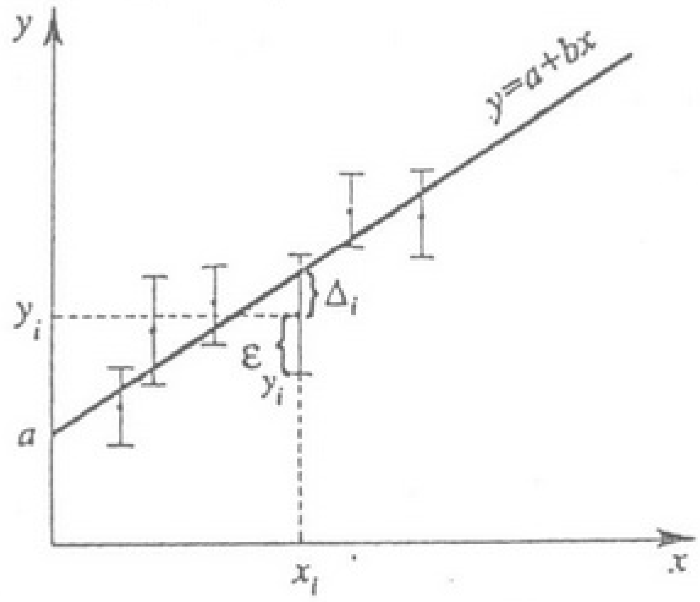
Sl. 1.3. *Pritisak gasa u funkciji temperature.*

3. Oznake fizičkih veličina i odgovarajuće jedinice obeležiti na krajevima osa. Za apscisnu osu pogodna je forma a) $\theta, {}^{\circ}C$; a za ordinantnu se može koristiti prethodni način zapisa ili b) $\frac{p}{\mathrm{Pa}}$. Oba načina obeležavanja fizičkih veličina i njihovih jedinica primenjuju se i u tabelama.
4. Za skale na osama se izabira srazmera 1, 2, 5, 10 (eventualno 4) za dekadni umnožak fizičke veličine. Pri tome srazmeru treba birati tako da eksperimentalne tačke zauzimaju ceo milimetarski papir formata A4.
5. Na osama se obeležavaju samo celobrojne odnosno "okrugle" vrednosti fizičkih veličina, a ne eksperimentalno dobijene.
6. Eksperimentalne tačke se prikazuju sa greškama, odnosno ucrta se krstić, pri čemu dužina kraka krstića odgovara grešci sa kojom je data veličina merena (vidi uveličani deo).
Ako je greška manja od vrednosti veličine koja odgovara 1 mm na grafiku, na vežbama se prikazuje sa krakom dužine 1 mm.
7. Kroz eksperimentalne tačke se povlači glatka kriva tako da što bolje odgovara merenim tačkama. Kada je u pitanju linearna zavisnost fizičkih veličina za povlačenje prave se obično koristi metod najmanjih kvadrata.

1.6.3. Metod najmanjih kvadrata

Pretpostavimo da je prilikom merenja dve fizičke veličine x i y, koje su linearno zavisne, dobijena serija parova vrednosti (x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_n, y_n). Ovi rezultati su prikazani na sl. 1.4. Zbog grešaka, odnosno rasturanja tačaka, nije lako vizuelno proceniti kako treba povući pravu. pa je potrebno računski odrediti linearnu funkciju $y=a+bx$ koja "najbolje" reprezentuje date eksperimentalne vrednosti. Jedan od kvantitativnih kriterijuma je metod najmanjih kvadrata. Taj kriterijum u opštem obliku glasi:

"Najverovatnije odnosno najbolje vrednosti za odsečak na ordinati, a, i koeficijent pravca, b, prave $y=a+bx$, su one, za koje je zbir kvadrata devijacija minimalan."



Sl.1.4. *Prava* $y=a+bx$.

Neka su relativne greške veličina x_i zanemarljive u odnosu na greške veličina y_i. Devijacija (odstupanje) i-te tačke od prave je definisana formulom:

$$\Delta_i = y_i - (a + b x_i), \quad (1.34)$$

i prikazana na sl. 1.4.

Potražimo vrednosti za a i b za koje se zbir kvadrata devijacija eksperimentalnih tačaka duž y ose minimizira. Pri tome je poželjno da, ukoliko eksperimentalna tačka ima manju grešku duž y ose, ε_{y_i}, njen uticaj na vrednosti veličina a i b bude veći. To se postiže tako što se svakoj tački (x_i, y_i) pridružuje *težina* w_i, koja se definiše kao:

$$w_i = \frac{1}{\left(\varepsilon_{y_i}\right)^2}. \quad (1.35)$$

"Bolje" tačke očigledno imaju veću težinu.

Zbir otežinjenih kvadrata devijacija, S, je funkcija dve nezavisne promenljive a i b:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2. \quad (1.36)$$

Vrednost S će biti minimalna za a i b koji zadovoljavaju uslove:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad (1.37)$$

odnosno:

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n} w_i\left[-2(y_i-ax_i-b)\right]=0 \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n} w_i\left[-2x_i(y_i-ax_i-b)\right]=0\,. \tag{1.39}$$

Ovaj sistem dve linearne jednačine sa dve nepoznate (a i b) može se napisati na sledeći način:

$$a\sum_{i=1}^{n} w_i + b\sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i \tag{1.40}$$

$$a\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i + b\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i y_i\,, \tag{1.41}$$

Rešenja sistema su:

$$a=\frac{D_a}{D}\,, \tag{1.42}$$

$$b=\frac{D_b}{D}\,, \tag{1.43}$$

gde je:

$$D_a=\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} w_i y_i \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^{\,2}\quad , \tag{1.44}$$

$$D_b=\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \sum_{i=1}^{n} w_i y_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i \tag{1.45}$$

$$D=\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^{\,2} \tag{1.46}$$

Pošto usled grešaka, eksperimentalne tačke odstupaju od prave, konstante a i b određene su sa ograničenom tačnošću. Njihove apsolutne greške se izračunavaju po sledećim obrascima:

$$\varepsilon_a=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^{\,2}}{|D|}}\,, \tag{1.47}$$

$$\varepsilon_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{|D|}} \quad . \tag{1.48}$$

Ako je ispitivana zavisnost $y = bx$, tj. $a = 0$, koeficijent b je određen formulom:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2} . \tag{1.49}$$

Primenu metoda najmanjih kvadrata ćemo pokazati na sledećem primeru: Pretpostavimo da treba merenjem trenutne brzine v, u funkciji vremena t, odrediti ubrzanje A, i početnu brzinu v_0, tela koje se kreće ravnomerno usporeno. Tada je $v = v_0 + At$. U Tabeli 1.9. su date izmerene vrednosti vremena i odgovarajuće brzine kao i izračunate vrednosti težina eksperimentalnih tačaka, w_i.

Tabela 1.9. *Podaci za primer primene metoda najmanjih kvadrata.*

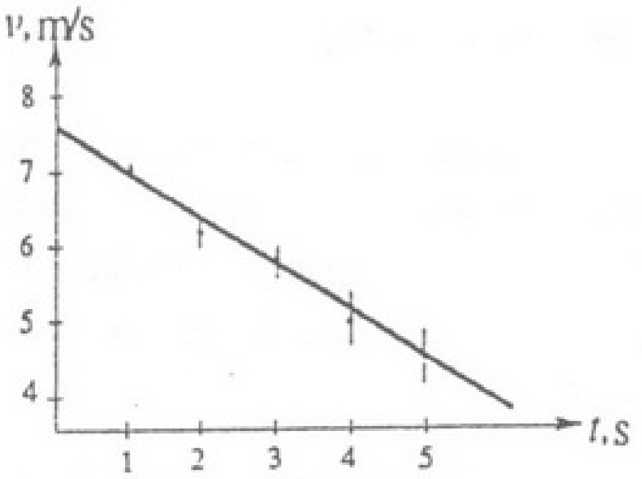
t , s	v , m/s	w , s^2 / m^2
1,00	$7,0 \pm 0,1$	100
2,00	$6,2 \pm 0,2$	25
3,00	$5,8 \pm 0,2$	25
4,00	$5,0 \pm 0,3$	11
5,00	$4,5 \pm 0,3$	11
		$\sum w_i = 172$

Ubrzanje i početnu brzinu određujemo primenom formula (1.42) i (1.43):

$v_0 = \dfrac{D_{v_0}}{D}$ i $A = \dfrac{D_A}{D}$. Ovde je:

$$D_{v_0} = \sum_{i=1}^{n} w_i t_i \sum_{i=1}^{n} w_i t_i v_i - \sum_{i=1}^{n} w_i v_i \sum_{i=1}^{n} w_i t_i^{\,2} \ ,$$

$$D_A = \sum_{i=1}^{n} w_i t_i \sum_{i=1}^{n} w_i v_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i t_i v_i$$



Sl. 1.5. *Zavisnost brzine od vremena.*

$$D = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i t_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i t_i^{\,2} .$$

Posle izračunavanja svih potrebnih suma i zamene odgovarajućih vrednosti u izraze za D_{v_0}, D_A i D dobijamo:

$$D_{v_0} = (3{,}24\mathrm{s}^3/\mathrm{m}^2 \cdot 19{,}12\mathrm{s}^2/\mathrm{m} - 11{,}04\mathrm{s/m} \cdot 8{,}76\mathrm{s}^4/\mathrm{m}^2) \cdot 10^4 =$$
$$-34{,}7616 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^5/\mathrm{m}^3$$

$$D_A = (3{,}24\mathrm{s}^3/\mathrm{m}^2 \cdot 11{,}04\mathrm{s/m} - 1{,}72\mathrm{s}^2/\mathrm{m}^2 \cdot 19{,}12\mathrm{s}^2/\mathrm{m}) \cdot 10^4 = 2{,}8832 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^4/\mathrm{m}^3$$

$$D = (3{,}24^2\mathrm{s}^6/\mathrm{m}^4 - 1{,}72\mathrm{s}^2/\mathrm{m}^2 \cdot 8{,}76\mathrm{s}^4/\mathrm{m}^2) \cdot 10^4 = -4{,}5696 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^6/\mathrm{m}^4 .$$

što konačno daje $v_0 = 7{,}60714\,\mathrm{m/s}$ i $A = -0{,}63095\,\mathrm{m/s}^2$.

Greške parametara prave su na osnovu jednačina (1.47) i (1.48) i pravila o zaokruživanju grešaka:

$$\varepsilon_A = 0{,}07\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \quad \varepsilon_{v_0} = 0{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Posle primene pravila o zaokruživanju rezultata zaključujemo da se brzina menja sa vremenom po zakonu:

$$v = 7{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\mathrm{m/s} - 0{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t \quad .$$

Ova funkcija je prikazana pravom na slici 1.5.

1.6.4. Linearizacija grafika

Opisanim metodom najmanjih kvadrata određuju se koeficijenti prave. Međutim u fizici se sreću i drugi tipovi funkcionalnih zavisnosti između fizičkih veličina. Ako je moguće, te zavisnosti se na pogodan način pretvore u linearne i zatim predstave grafički. Ovaj postupak se naziva *linearizacija*. Neki primeri funkcija koje linearizujemo su:

1). $y=a e^{b\cdot x}$, gde se prelazi na linearnu vezu logaritmovanjem: $\ln y=\ln a+b x$. Na apscisu se nanosi x a na ordinatu $\ln y$.

2). $y=c\sqrt{x}$, za koju se na apscisu ne nanose vrednosti x nego $\sqrt{x}$.

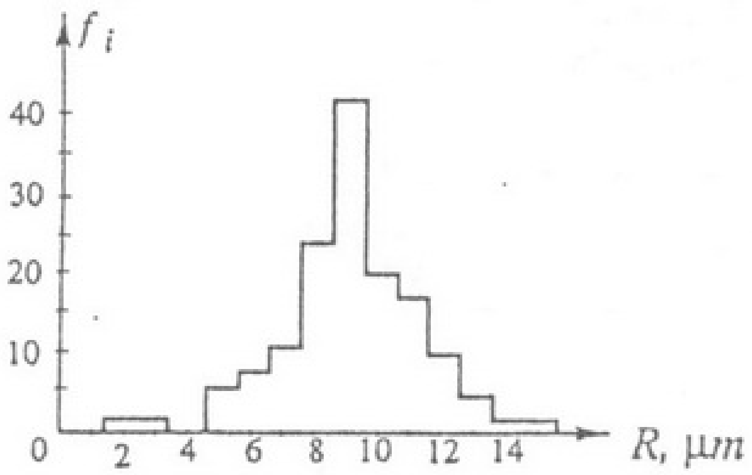
3). $y=\dfrac{a}{b+cx}$, za koju se prelaskom na veličinu $\dfrac{1}{y}$ dobija linearna zavisnost od x koja glasi: $\dfrac{1}{y}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}x$.

4). $y=k x^2$. Na apscisu se nanosi x^2, a na ordinatu y, ili na apscisu x a na ordinatu $\sqrt{y}$.

1.6.5. Prikazivanje rezultata pomoću histograma

Rezultati serije merenja jedne fizičke veličine, koji se međusobno razlikuju zbog slučajnih grešaka mogu se grafički prikazati *histogramom*. Histogram je grafikon koji prikazuje statističku strukturu date serije merenja i obično se koristi za prikazivanje velikog broja (najmanje nekoliko desetina) eksperimentalnih podataka.

Histogram se dobija tako što se domen promene neke fizičke veličine podeli na pogodne intervale, a zatim utvrdi koliko rezultata merenja pripada svakom intervalu. Ovaj broj se naziva frekvencija. Pri tome se dužina intervala bira tako da u proseku u intervalu bude bar deset podataka. Na apscisnu osu se nanosi vrednost merene veličine (intervali) a na ordinantnu odgovarajuća frekvencija.



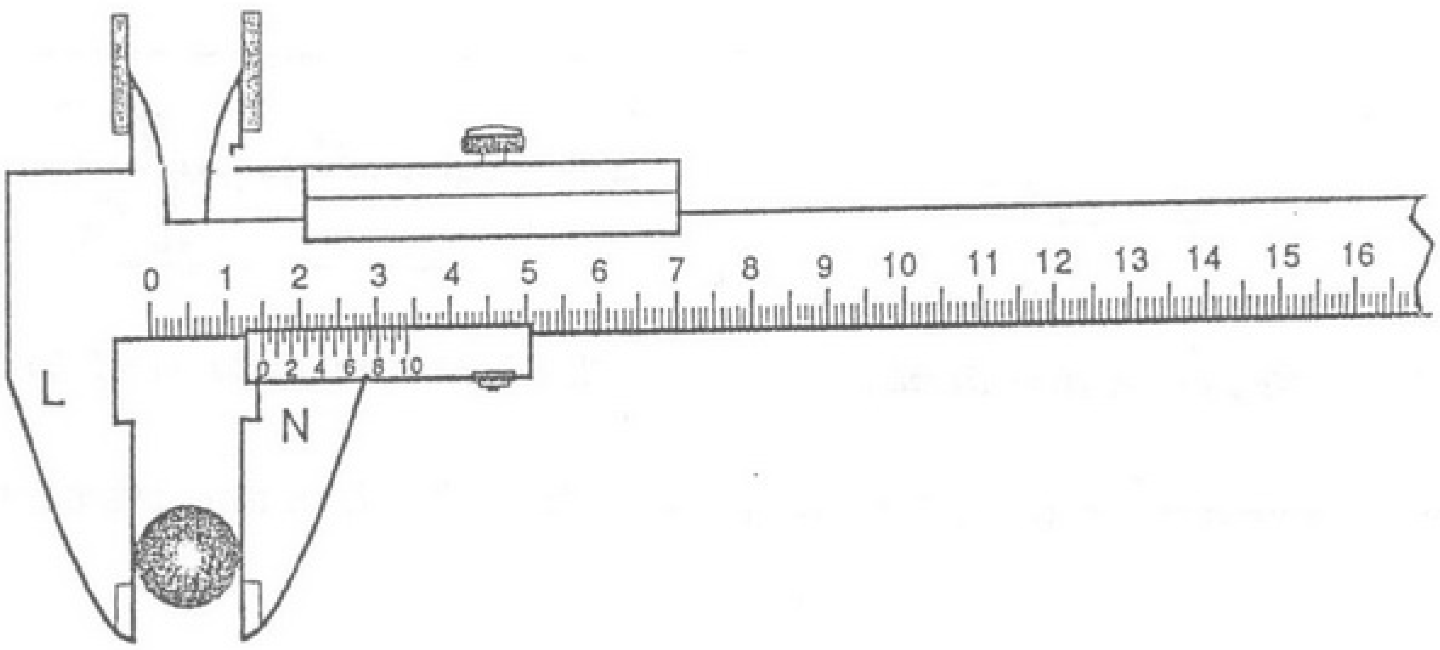
Sl. 1.6. *Histogram*.

U Odeljku 1.4.4., u Tabeli 1.7. dati su podaci za merene dužine tragova alfa čestica i odgovarajući broj čestica koje imaju trag određene dužine, (f_i). Ti podaci su na sl. 1.6. predstavljeni histogramom. Pošto je ukupan broj podataka 138, da bi u svakom intervalu bilo prosečno 10 podataka, ceo interval dužina je podeljen na 14 intervala, ($138/10\approx 14$), odnosno za dužinu intervala uzeta je vrednost 1.

2. MERNI INSTRUMENTI (MERILA)

2.1 *POMIČNO MERILO DUŽINE SA NONIJUSOM*

Pomično merilo sa nonijusom je instrument za merenje dužine. U praksi se obično naziva "nonijus" ili "šubler". On se sastoji od osnovnog dela ili osnovnog lenjira L, sa nepomičnim krakom, na kome je ugravirana glavna skala i pokretnog dela, nonijusa N, koji sadrži nonijusnu skalu. Konstruisan je tako da mogu da se mere, pored spoljašnjih dimenzija i unutrašnje dimenzije i dubine objekata (sl. 2.1.). Na sl. 2.2. prikazan je najjednostavniji primer nonijusa sa 10 podelaka. Vidi se da dužina 10 podelaka na nonijusu odgovara dužini 9 podelaka na osnovnom lenjiru.



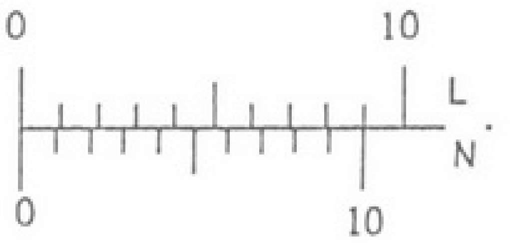
Sl. 2.1 *Pomično merilo dužine sa nonijusom*

Kada su kraci lenjira i nonijusa sastavljeni, nule obe skale se poklapaju. Merenje se obavlja tako što se objekat merenja postavlja između nepokretnog i pokretnog kraka merila. Tada su kraci na rastojanju d koje odgovara merenoj dužini, i "nule" su na rastojanju d. Na sl. 2.1. to bi bio prečnik lopte. Kako se očitava vrednost te dužine?

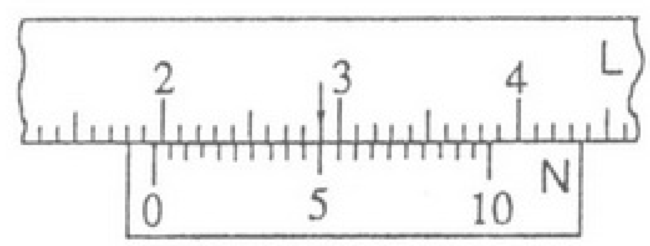
Označimo sa l_L dužinu podeoka na skali osnovnog lenjira, a sa n ukupan broj podelaka na skali nonijusa. Sa n_L ćemo obeležiti broj podelaka na glavnoj skali između njene nule i nule nonijusa. Sa običnim lenjirom tu bi posao bio završen. Procenili bismo koji je najbliži podelak na skali i dobili rezultat u milimetrima. Na sl. 2.3., to je 19 mm. Da bi odredili ostatak, uočimo koji se podelak po redu, n_N, na skali nonijusa poklapa sa nekim od podelaka na glavnoj skali lenjira. Kako je najmanja dužina koja može da se očita instrumentom $\frac{l_L}{n}$, dužina ostatka je $n_N \frac{l_L}{n}$, pa ukupna dužina d iznosi:

$$d = n_L \, l_L + n_N \frac{l_L}{n} = \left(n_L + \frac{n_N}{n} \right) l_L \,. \tag{2.1}$$

Količnik n_N/n daje delove od l_L (na pr. mm), a relacija (2.1) je obrazac za izračunavanje dužine merenog predmeta. Prilikom primene ovog obrasca treba voditi računa da često nisu svi već svaki drugi, peti ili čak deseti podelak nonijusa numerisani.



Sl. 2.2. *Nonijus sa 10 podelaka.*

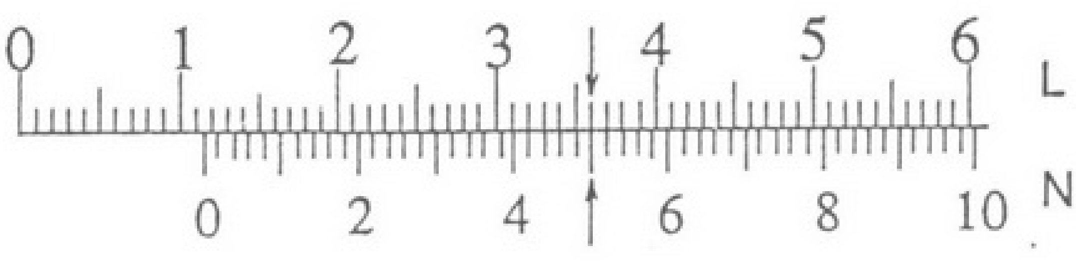


Sl. 2.3. *Nonijus sa 20 podelaka.*

Na primeru prikazanom na sl. 2.3. n_L=19; n_N=10; n=20; l_L=1mm , sva pa je dužina:

$$d = \left(n_L + \frac{n_N}{n} \right) l_L = \left(19 + \frac{10}{20} \right) \cdot 1\,\text{mm} = 19{,}50\,\text{mm}\,.$$

Drugi primer je dat za nonijus sa 50 podelaka (sl. 2.4.).



Sl. 2.4. *Nonijus sa 50 podelaka.*

Ovde je $n_L = 11$; n_N=25; n=50; l_L=1mm . Dužina je:

$$d = \left(11 + \frac{25}{50} \right) \cdot 1\,\text{mm} = 11{,}50\,\text{mm}\,.$$

Nominalna granica greške definisana je standardom i obeležena na samom instrumentu. Ona je jednaka količniku dužine podeoka na osnovnoj skali lenjira i ukupnog broja podelaka na nonijusnoj skali:

$$\varepsilon_d = \frac{l_L}{n}. \tag{2.2}$$

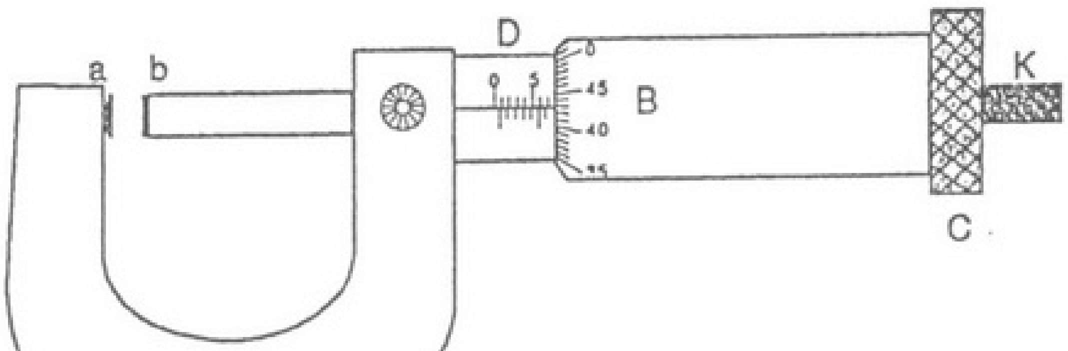
Najčešće je skala osnovnog lenjira milimetarska, tj. $l_L = 1\,\mathrm{mm}$, a n je 10, 20, ili 50. Tada greška nonijusa, ε_d, iznosi: $0{,}1\,\mathrm{mm}$, $0{,}05\,\mathrm{mm}$ i $0{,}02\,\mathrm{mm}$, respektivno.

Apsolutna vrednost greške merenja dužine jednaka je granici greške nonijusa pa je u prvom navedenom primeru korektno zapisan rezultat: $d = (19{,}50 \pm 0{,}05)\,\mathrm{mm}$, a u drugom: $d = (11{,}50 \pm 0{,}02)\,\mathrm{mm}$.

Princip nonijusa primenjuje se osim kod lenjira i kod drugih mernih instrumenata (na pr. kod polarimetra).

2.2. *MERILO DUŽINE SA MIKROMETARSKIM ZAVRTNJEM*

Merilo dužine sa mikrometarskim zavrtnjem (popularno "mikrometarski zavrtanj" ili "mikrometar"), sl. 2.5., služi takođe za merenje linearnih dimenzija malih tela. Osnovni deo instrumenta je zavrtanj C. Zavrtanj se može obrtati unutar matice D. Na matici obično postoje dve skale, gornja i donja. Obe skale su u milimetrima, ali su međusobno pomerene za pola milimetra.



Sl. 2.5. *Merilo dužine sa mikrometarskim zavrtnjem.*

Kružna skala na dobošu, B, koja se okreće zajedno sa zavrtnjem C, služi za očitavanje delova milimetra. Ta skala ima 50 ili 100 podelaka. Dužina za koju se zavrtanj pomeri pri jednom obrtu naziva se *hod*, h. Hod iznosi $0{,}5\,\mathrm{mm}$ kada kružna skala ima 50, a $1\,\mathrm{mm}$ kada skala ima 100 podelaka.

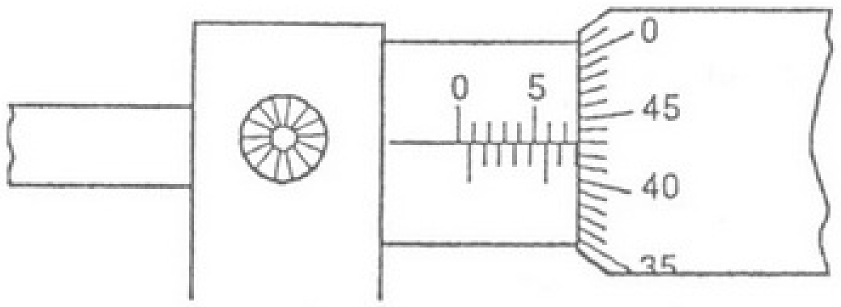
Predmet koji se meri stavlja se između krajeva a i b. Deo zavrtnja (K) služi za ograničavanje kretanja i obezbeđuje da se predmet koji se meri ne deformiše.

Označimo sa n_L broj podelaka na osnovnom delu do kružne skale, sa n_M redni broj podeoka kružne skale koji se poklapa sa horizontalnom linijom na skali matice, a sa n ukupan broj podelaka na kružnoj skali.

Dužina d se određuje po formuli:

$$d = n_L h + \frac{n_M}{n} h. \qquad (2.3)$$

Na sl. 2.6. prikazan je uveličano deo sa skalama gde možemo očitati:



Sl. 2.6. *Očitavanje sa mikrometarskog zavrtnja.*

$n_L = 14$; $n_M = 43$; $n = 50$ i $h = 0{,}5\,\mathrm{mm}$. Dužina je: $d = 14 \cdot 0{,}5\ \mathrm{mm} + \frac{43}{50} \cdot 0{,}5\ \mathrm{mm} =$ 7,43 mm.

Granica greške instrumenta jednaka je najmanjoj dužini koja se njime može izmeriti i određuje se kao količnik hoda mikrometra i broja podelaka na kružnoj skali:

$$\varepsilon_d = \frac{h}{n}. \qquad (2.4)$$

Kako je u našem primeru korišćen mikrometar sa hodom $h = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ i $n = 50$, apsolutna greška merenja je jednaka granici greške instrumenta:

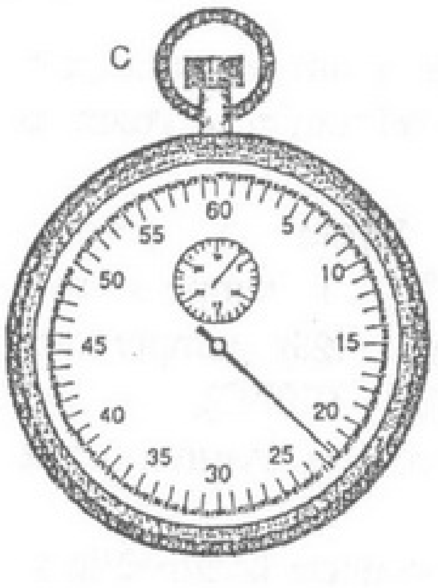
$$\varepsilon_d = \frac{h}{n} = \frac{0{,}5\mathrm{mm}}{50} = 0{,}01\,\mathrm{mm}. \qquad (2.5)$$

Korektno zapisan rezultat merenja dužine u ovom primeru je:

$$d = (7{,}43 \pm 0{,}01)\ \mathrm{mm}.$$

2.3. HRONOMETAR

Hronometar je instrument koji se upotrebljava za merenje vremena. Prikazan je na sl. 2.7. Na njemu se nalaze dve kružne skale i dve kazaljke. Spoljna, velika skala sa kazaljkom služi za očitavanje sekundi i delova sekundi, a mala, unutrašnja za očitavanje minuta. Za 60 sekundi velika kazaljka obiđe krug a mala se pomeri za jedan podelak.



Sl. 2.7. *Hronometar.*

Uključivanje i isključivanje hronometra se vrši pritiskom na dugme C. Prvim pritiskom na dugme hronometar počne da radi, a drugim pritiskom se zaustavlja. Isto dugme služi i za vraćanje kazaljki na nulu (trećim pritiskom).

Postoje hronometri koji imaju posebno dugme za vraćanje kazaljki na nulu. Ono se nalazi bočno, pored dugmeta C.

Granica greške hronometra prikazanog na sl. 2.7. iznosi 0,2 s, merni opseg je 30 minuta. Na osnovu položaja kazaljki zaključujemo da je od uključivanja proteklo 202,4 s.

Pored klasičnog hronometra koji je ovde opisan, za merenje vremena se sve više koriste elektronski hronometri sa displejom, kojima se može meriti vremenski interval sa greškom reda stotih pa i hiljaditih delova sekunde.

2.4. TERMOMETAR

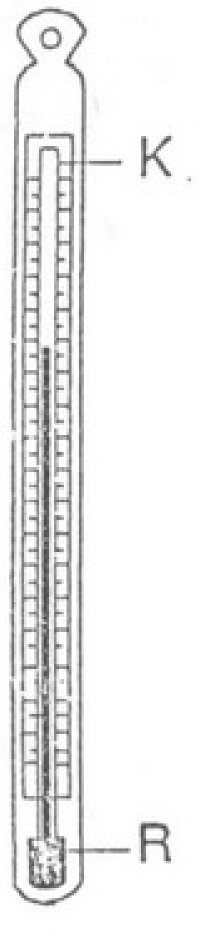
Temperatura nekog tela se može meriti pomoću neke fizičke veličine koja se menja sa promenom temperature. Takva fizička veličina se naziva temperaturski parametar. Ona mora da zadovoljava sledeće uslove:

- da je nezavisna od uticaja drugih faktora (bar u sredini u kojoj se vrši merenje)
- mora biti neprekidna i monotona funkcija temperature i
- mora postojati jednoznačni postupak za njeno merenje.

Fizičke veličine koje se mogu upotrebiti za merenje temperature su: zapremina tečnosti ili gasa, otpor provodnika, pritisak gasa, termoelektromotorna sila, spektralni sastav zračenja koje emituje zagrejano telo i dr.

Termometri su instrumenti za merenje temperature. Najčešće se upotrebljava termometar sa živom (sl. 2.8.). Sastoji se od cilindričnog rezervoara R, sa živom, koji se produžava u kapilarnu cev K, konstantnog poprečnog preseka, zatvorenu na gornjem kraju. Pošto je prečnik kapilare mali a zapremina žive se menja sa promenom temperature, i mala promena temperature prouzrokuje znatnu promenu nivoa žive u kapilari. Na skali koja se nalazi iza kapilare direktno se očitava temperatura.

Maksimalna temperatura koja može da se odredi datim termometrom određena je prečnikom kapilare, njenom dužinom i zapreminom rezervoara sa živom.



Sl. 2.8. *Termometar sa živom.*

Merni opseg termometra sa živom je određen temperaturom mržnjenja žive (-38,9 °C) i temperaturom ključanja žive (356,7 °C). Za merenje nižih temperatura upotrebljava se termometar sa alkoholom (do –120 °C).

Pri merenju temperature termometrom sa živom mora se voditi računa o sledećem:

1.Da bi se temperatura žive u termometru izjednačila sa temperaturom sredine (uspostavi se termička ravnoteža) potrebno je izvesno vreme koje za tečnosti iznosi dva do tri minuta, a za gasove nešto duže.

2.Za vreme očitavanja temperature ceo rezervoar termometra treba da se nalazi u sredini u kojoj se vrši merenje. Kada se meri temperatura gasa, rezervoar ne sme da bude vlažan jer isparavanje utiče na merenje.

Granica greške je određena vrednošću podeoka na skali. Kod laboratorijskih termometara sa živom obično iznosi 0,5 ili 0,2 °C.

Postoje termometri kod kojih se nivo žive zadržava na podeoku maksimalno izmerene temperature (maksimalni termometri). Da bi se živa vratila u rezervoar, termometar treba protresti..

2.5. MANOMETAR

Manometar je instrument za merenje pritiska gasova i tečnosti. Najstariji i najjednostavniji manometar sa tečnošću koji se upotrebljava za merenje pritiska gasova je "U" manometar. Sastoji se iz staklene cevi u obliku slova U u kojoj se obično nalazi živa ili ulje. Pravi se kao otvoreni i zatvoreni manometar.

Otvoreni "U" manometar je prikazan na sl. 2.9 a. Jedan kraj manometra je otvoren i izložen je dejstvu atmosferskog (spoljašnjeg) pritiska p_a, a drugi kraj je povezan sa zapreminom (balonom) u kojoj se određuje pritisak p. Iz Bernulijeve jednačine (6.3) sledi da je u stanju ravnoteže:

$$p + \rho g h_2 = p_a + \rho g h_1, \qquad (2.6)$$

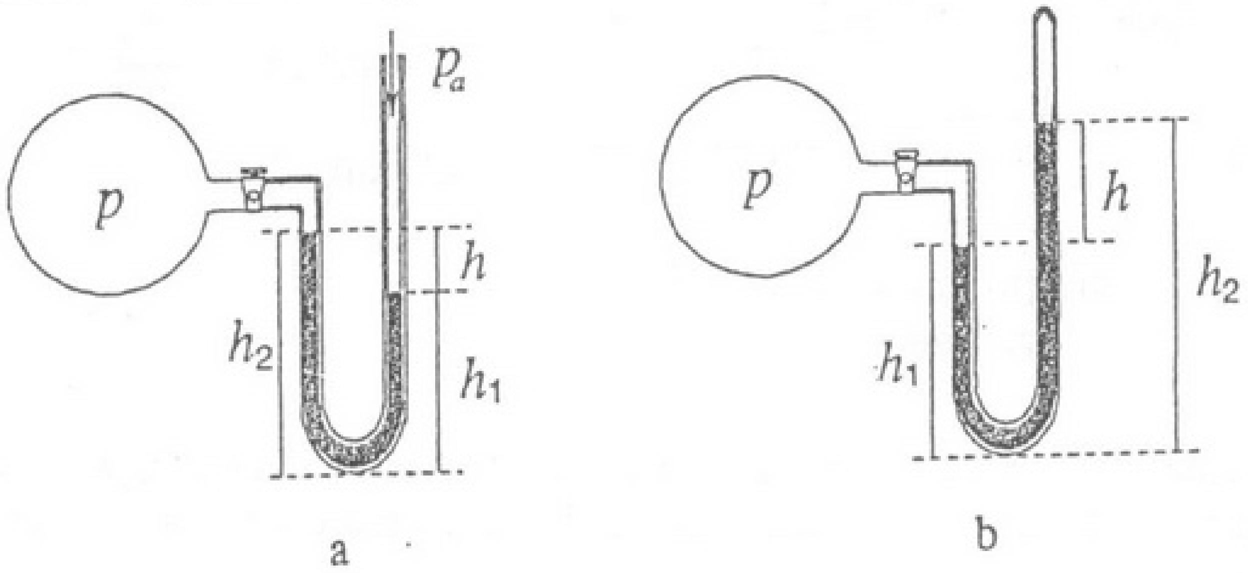
gde je ρ gustina tečnosti u manometru, g je ubrzanje Zemljine teže a h_1 i h_2 su visine stubova tečnosti u desnom i levom kraku manometra. Razlika pritisaka u kracima otvorenog "U" manometra je proporcionalna razlici nivoa tečnosti h :

$$p_a - p = \rho g h_2 - \rho g h_1 = \rho g h\,. \tag{2.7}$$

Iz ove relacije nepoznati pritisak iznosi:

$$p = p_a - \rho g h\,. \tag{2.8}$$

Pritisak u balonu je u ovom primeru manji od atmosferskog.



Sl. 2.9. *Otvoreni i zatvoreni manometar.*

Nedostatak merenja pritiska otvorenim "U" manometrom je u tome što rezultat merenja zavisi od atmosferskog pritiska, a on se može menjati u toku eksperimenta.

Zatvoreni "U" manometar je prikazan na sl. 2.9 b. Jedan kraj manometra je zatvoren i sadrži tečnost i paru tečnosti. Poželjno je da se izabere tečnost koja ima što nižu vrednost pritiska zasićene pare (na pr. živa) kako bi iznad tečnosti praktično bio vakuum. Drugi kraj je povezan sa zapreminom u kojoj se određuje pritisak p. Izmereni pritisak je proporcionalan razlici nivoa tečnosti u kracima manometra tj.:

$$p + \rho g h_1 = \rho g h_2 \tag{2.9}$$

$$p = \rho g (h_2 - h_1) = \rho g h\,. \tag{2.10}$$

Najmanja promena pritiska koja može da se izmeri sa zatvorenim "U" manometrom je određena greškom merenja razlike u nivoima tečnosti u kracima manometra.